第44講　空間ベクトル(1)

【基礎確認事項】

［1］ 空間座標

平面座標と同じように，空間内の点についても座標を考えることができる．

□原点Oを定め，Oを通り，互いに垂直な3本の数直線をひき，これを右の図のように $\boldsymbol{x}$ **軸**，$\boldsymbol{y}$ **軸**，$\boldsymbol{z}$ **軸**と定める．

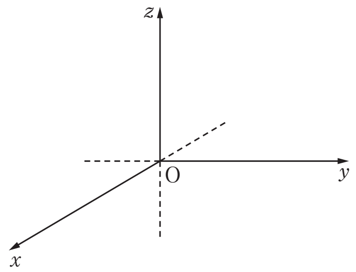
これらをまとめて**座標軸**という．

x 軸と y 軸が定める平面を $\boldsymbol{xy}$ **平面**

y 軸と z 軸が定める平面を $\boldsymbol{yz}$ **平面**

z 軸と x 軸が定める平面を $\boldsymbol{zx}$ **平面**

といい，これらをまとめて**座標平面**という．

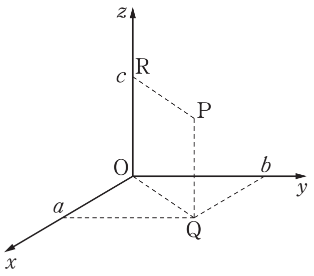


□この空間内の任意の点をPとし，Pから xy 平面に垂線PQをひき，点Qの xy 平面での座標を $(a,\ b)$ とする．さらに，点Pから z 軸に垂線PRをひき，Rの z 軸上での座標を c とすれば，点Pに対して3つの実数値の組 $(a,\ b,\ c)$ が定まる．

この $(a,\ b,\ c)$ を点Pの**座標**といい，$\mathbf{P}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})$ と表す．

またこの $a,\ b,\ c$ を点Pの $\boldsymbol{x}$ **座標**，$\boldsymbol{y}$ **座標**，$\boldsymbol{z}$ **座標**という．

　このように座標が $(a,\ b,\ c)$ で定められた空間を**座標空間**という．



⇒　C&U 1

［2］ 空間ベクトル

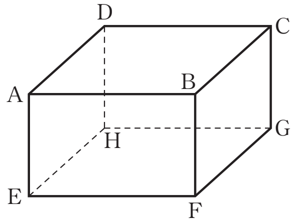
□平面ベクトルと同様に，空間において大きさと方向をもつ量を空間ベクトルという．平面ベクトルに関する定義は，空間ベクトルにおいてもそのまま適用される．

例　右図の直方体において

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\overrightarrow{\mathrm{HG}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{FG}}=\overrightarrow{\mathrm{EH}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{BF}}=\overrightarrow{\mathrm{CG}}=\overrightarrow{\mathrm{DH}}$



空間ベクトルの演算についても，平面ベクトルとまったく同様な演算法則が成立する．

⇒　C&U 2

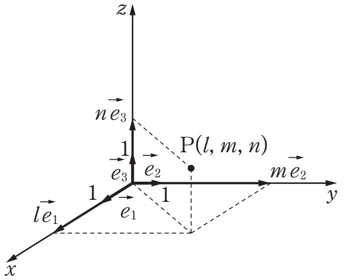
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

［３］ 空間ベクトルの分解と成分表示

□空間上の異なる４点Ｏ，Ａ，Ｂ，Ｃについて，A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$) において，Ａ，Ｂ，Ｃで定まる平面上に点Ｏがないとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は**１次独立**であるという．

□空間上のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ が１次独立であるとき，この空間上の任意のベクトル $\vec{p}$ は $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および実数 s，t，u を用いて $\boxed{\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}}$ と，ただ１通りに表すことができる．$\vec{p}=\vec{0}$ のときは　$s=t=u=0$ である．このように，空間上の任意のベクトルは，互いに平行でない３つの方向に分解することができる．

□Ｏを原点とする座標空間上の任意のベクトル $\vec{p}$ を，x 軸方向，y 軸方向，z 軸方向の正の向きの単位ベクトル $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$ を用いて表すことができる．



　原点Ｏを始点とする $\vec{p}$ に等しいベクトルの終点をＰとする．このときの点Ｐの座標を (l，m，n) とすると，

$$\vec{p}=l\vec{e_1}+m\vec{e_2}+n\vec{e_3} \quad \cdots\cdots①$$

である．つまり，$\vec{p}$ が与えられると，①を満たす実数の組 (l，m，n) がただ１つ定まる．逆に，実数の組 (l，m，n) が与えられると，①を満たす $\vec{p}$ がただ１つ定まる．このとき，$\vec{p}$ を

$$\boxed{\vec{p}=(l,\ m,\ n)} \quad \cdots\cdots②$$

と表す．②における l を $\vec{p}$ の ***x* 成分**，m を ***y* 成分**，n を ***z* 成分**といい，②を $\vec{p}$ の**成分表示**という．

□x 軸上，y 軸上，z 軸上の単位ベクトル $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$ をとくに**基本ベクトル**という．基本ベクトルを成分で表すと　$\vec{e_1}=(1,\ 0,\ 0)$，$\vec{e_2}=(0,\ 1,\ 0)$，$\vec{e_3}=(0,\ 0,\ 1)$ である．
成分表示されたベクトルは，x 軸方向，y 軸方向，z 軸方向の移動量を表す．

⇒　C&U ３

［４］ 空間ベクトルの大きさと内積

□成分表示されたベクトルの大きさについて次のことがわかる．

$$\boxed{\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)\text{ のとき }\ |\vec{a}|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}}$$

□内積の定義は，空間ベクトルでも平面ベクトルと同じである．空間における $\vec{0}$ でないベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，そのなす角を $\theta(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ とすると

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \qquad \cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}}$$

と定義する．とくに

$\vec{a}=0$　または　$\vec{b}=0$ のときは　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

である.

□また，$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$ について，

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

である.

内積についても，平面ベクトルと同様の演算法則が成り立つ.

⇒　C&U ④

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

〈 Memo 〉

【CHECK & UP】

1　A(3，-2，1) に対して，次の点の座標を求めよ．

(1)　xy 平面に関して対称な点 P

(2)　z 軸に関して対称な点 Q

(3)　原点に対して対称な点 R

2　平行六面体 ABCD-EFGH において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とする．また，線分 EG と線分 FH の交点を P とする．このとき，$\overrightarrow{AG}$，$\overrightarrow{BH}$，$\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{PC}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

3　$\vec{a}=(-1,\ 5,\ 7)$，$\vec{b}=(3,\ 4,\ 3)$，$\vec{c}=(2,\ -2,\ 3)$，$\vec{d}=(-1,\ -9,\ 10)$ のとき，
$\vec{d}=l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$　が成り立つように定数 l，m，n の値を求めよ．

4　3 点 A(1，3，2)，B(2，5，3)，C(-1，5，6) を頂点とする △ABC において，∠BAC の大きさを求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第44講　空間ベクトル(1)

1 [1]　定点A(2, 0, 3), B(1, 2, 1)と, xy平面上の点Pに対し, AP＋PBの最小値を求めよ.

[2]　直方体ABCD-EFGHにおいて　AB＝4, AD＝2, AE＝1とする. $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{c}$とするとき, 次の問いに答えよ.

(1)　$\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BH}$を$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$を用いて表せ.　　(2)　内積$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BH}$を求めよ.

(3)　$\overrightarrow{AG}$と$\overrightarrow{BH}$のなす角は120°より大きいか小さいかを調べよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　1辺の長さが1の正四面体OABCにおいて，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする．

(1)　辺OAの中点をMとする．このとき，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表し，内積 $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}$ を求めよ．

(2)　辺BC上に $BD=\dfrac{1}{3}$ となるように点Dをとる．このとき，内積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}$ を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 [1]　A$(-2,\ 1,\ 3)$，B$(-3,\ 1,\ 4)$，C$(-3,\ 3,\ 5)$ とするとき，2つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のなす角を求めよ．また，△ABC の面積 S を求めよ．

[2]　2つのベクトル $\vec{a}=(1,\ -2,\ 2)$，$\vec{b}=(2,\ 3,\ -10)$ の両方に垂直な単位ベクトルを求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第44講　空間ベクトル(1)

1辺の長さが4である正四面体OABCにおいて，辺OA，BCの中点をそれぞれM，N，線分MNの中点をGとする．$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ のなす角を θ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{\boxed{\text{ア}}}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$，$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=-\dfrac{1}{\boxed{\text{イ}}}(\boxed{\text{ウ}}\,\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$　である．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\boxed{\text{エオ}}$，　$|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|^2=\boxed{\text{カ}}$，　$|\overrightarrow{\mathrm{AG}}|^2=\boxed{\text{キ}}$　である．

(3)　$\cos\theta=\dfrac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$　である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

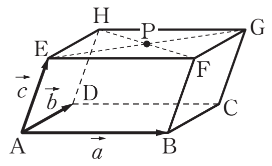
ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 44 講　空間ベクトル(1)

【CHECK & UP】

1 (1) $\mathbf{P(3,\ -2,\ -1)}$　　(2) $\mathbf{Q(-3,\ 2,\ 1)}$　　(2) $\mathbf{R(-3,\ 2,\ -1)}$

2 $\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}$　　$\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\boldsymbol{-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}$



$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{EP}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{EG}}=\vec{c}+\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$

$=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}}$

$\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(\vec{a}+\vec{b})-\left(\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}\right)$

$=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}}$

> 平行六面体とは，2つずつ平行な3組の平面で囲まれる六面体．直方体や立方体もこの平行六面体に含まれる．また，各面は平行四辺形である．

3 $\vec{d}=l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$　より

$(-1,\ -9,\ 10)=l(-1,\ 5,\ 7)+m(3,\ 4,\ 3)+n(2,\ -2,\ 3)$

$=(-l+3m+2n,\ 5l+4m-2n,\ 7l+3m+3n)$

> 空間上の任意のベクトルは，1次独立の3つのベクトルでただ1通りに表せる．

よって　$-l+3m+2n=-1,\ 5l+4m-2n=-9,\ 7l+3m+3n=10$　より

$\boldsymbol{l=1,\ m=-2,\ n=3}$

4 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1,\ 2,\ 1)$　より　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-2,\ 2,\ 4)$　より　$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{4+4+16}=2\sqrt{6}$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=1\times(-2)+2\times2+1\times4=6$

> 空間においても，平面におけるベクトルの大きさ，内積の計算と同様に行うことができる．z成分に関する計算が加わることに注意．

よって　$\cos\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}=\dfrac{6}{\sqrt{6}\times2\sqrt{6}}=\dfrac{1}{2}$　より　$\angle\mathrm{BAC}=\mathbf{60^\circ}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第44講　空間ベクトル(1)

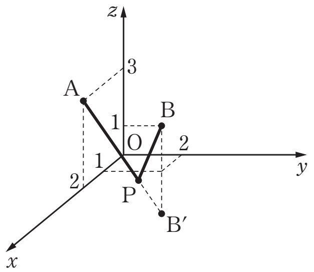
1 [1]　定点 A(2, 0, 3), B(1, 2, 1) と, xy 平面上の点 P に対し, AP＋PB の最小値を求めよ.

xy 平面に関して点 B と対称な点を B′ とすると B′(1, 2, −1)

このとき　AP＋PB＝AP＋PB′≧AB′

したがって，もとめる最小値は

$$AB'=\sqrt{(1-2)^2+(2-0)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{\mathbf{21}}$$



1 [2]　直方体 ABCD-EFGH において　AB＝4, AD＝2, AE＝1 とする. $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ.

(1)　$\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BH}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ.　　(2)　内積 $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BH}$ を求めよ.

(3)　$\overrightarrow{AG}$ と $\overrightarrow{BH}$ のなす角は 120° より大きいか小さいかを調べよ.

(1)　$\overrightarrow{AG}=\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}$　　$\overrightarrow{BH}=\boldsymbol{-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}$

(2)　$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BH}=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=|\vec{b}+\vec{c}|^2-|\vec{a}|^2$

$=|\vec{b}|^2+2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2-|\vec{a}|^2=4+1-16=\mathbf{-11}$

(3)　$|\overrightarrow{AG}|=\sqrt{1+4+16}=\sqrt{21}$　　$|\overrightarrow{BH}|=\sqrt{21}$

$\overrightarrow{AG}$ と $\overrightarrow{BH}$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BH}}{|\overrightarrow{AG}||\overrightarrow{BH}|}=\frac{-11}{\sqrt{21}\sqrt{21}}=-\frac{11}{21}<-\frac{1}{2}=\cos 120^\circ$$　　よって **120° より大きい**

2　1辺の長さが1の正四面体 OABC において，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする.

(1)　辺 OA の中点を M とする. このとき, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表し，内積 $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}$ を求めよ.

(2)　辺 BC 上に $BD=\frac{1}{3}$ となるように点 D をとる. このとき, 内積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}$ を求めよ.

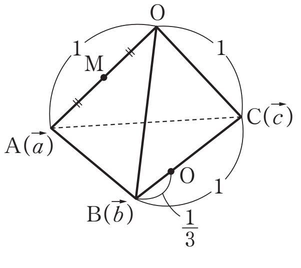
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cdot\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$

(1)　$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}}$　　$\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}}$

$$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=\left(\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)$$

$$=\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{c}+\frac{1}{4}|\vec{a}|^2$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\mathbf{\frac{1}{4}}$$



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{b}+\frac{1}{3}(\vec{c}-\vec{b})=\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{a}\cdot\left(\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)=\frac{2}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{c}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

3 ［1］　A(−2, 1, 3), B(−3, 1, 4), C(−3, 3, 5) とするとき，2つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のなす角を求めよ．また，△ABC の面積 S を求めよ．

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ 0,\ 1)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-1,\ 2,\ 2)$ より

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{1+0+1}=\sqrt{2}$　　$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{1+4+4}=3$　　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=1+0+2=3$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のなす角 θ は

$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}=\frac{3}{\sqrt{2}\times3}=\frac{1}{\sqrt{2}}$　　$0\leqq\theta\leqq180^\circ$　より　$\theta=\boldsymbol{45^\circ}$

$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sin\theta=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times3\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{3}{2}}$

3 ［2］　2つのベクトル $\vec{a}=(1,\ -2,\ 2)$, $\vec{b}=(2,\ 3,\ -10)$ の両方に垂直な単位ベクトルを求めよ．

求める単位ベクトルを $\vec{n}=(x,\ y,\ z)$ とする．

$|\vec{n}|=1$　より　$x^2+y^2+z^2=1^2$　……①

$\vec{a}\perp\vec{n}$　より　$\vec{a}\cdot\vec{n}=0$　　よって　$x-2y+2z=0$　……②

$\vec{b}\perp\vec{n}$　より　$\vec{b}\cdot\vec{n}=0$　　よって　$2x+3y-10z=0$　……③

②, ③より　$x=2z$, $y=2z$

これらを①に代入して　$9z^2=1$　　$z^2=\frac{1}{9}$　　$z=\pm\frac{1}{3}$

よって求める単位ベクトルは $\vec{n}=\left(\pm\frac{2}{3},\ \pm\frac{2}{3},\ \pm\frac{1}{3}\right)=\boldsymbol{\pm\frac{1}{3}(2,\ 2,\ 1)}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第44講　空間ベクトル(1)

1辺の長さが4である正四面体OABCにおいて，辺OA，BCの中点をそれぞれM，N，線分MNの中点をGとする．$\overrightarrow{OG}$ と $\overrightarrow{AG}$ のなす角を θ とし，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする．

(1)　$\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{\boxed{ア}}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$，$\overrightarrow{AG}=-\dfrac{1}{\boxed{イ}}(\boxed{ウ}\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$　である．

(2)　$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{AG}=\boxed{エオ}$，　$|\overrightarrow{OG}|^2=\boxed{カ}$，　$|\overrightarrow{AG}|^2=\boxed{キ}$　である．

(3)　$\cos\theta=\dfrac{\boxed{クケ}}{\boxed{コ}}$　である．

(1)　$\overrightarrow{OG}=\dfrac{\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}\right)=\dfrac{1}{\mathbf{4}}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{c}$

$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OA}=\left(\dfrac{1}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{c}\right)-\vec{a}=-\dfrac{3}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{c}=-\dfrac{1}{\mathbf{4}}(\mathbf{3}\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$

(2)　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=4$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=4\times4\times\cos 60^\circ=8$　より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{AG}&=-\frac{1}{16}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(3\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})\\&=-\frac{1}{16}(3|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2-|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a})\\&=-\frac{1}{16}(3\cdot16-16-16+2\times8-2\times8+2\times8)\\&=\mathbf{-2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OG}|^2&=\frac{1}{16}|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2=\frac{1}{16}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a})\\&=\frac{1}{16}(16+16+16+2\times8+2\times8+2\times8)=\mathbf{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AG}|^2&=\frac{1}{16}|3\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}|^2=\frac{1}{16}(9|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}-6\vec{c}\cdot\vec{a})\\&=\frac{1}{16}(9\times16+16+16-6\times8+2\times8-6\times8)=6\end{aligned}$$

(3)　$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{AG}}{|\overrightarrow{OG}||\overrightarrow{AG}|}=\dfrac{-2}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。